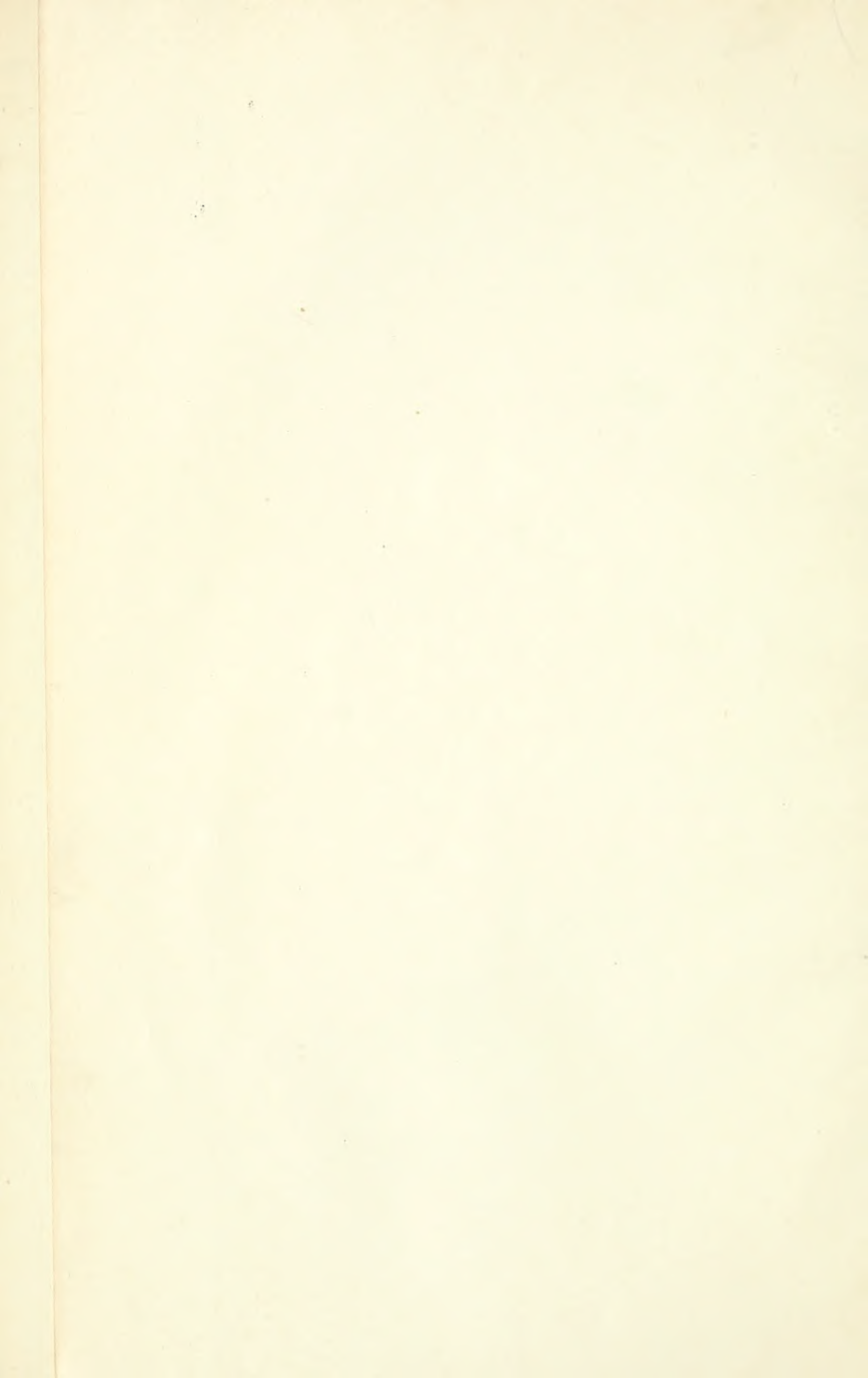






Ernst Eduard Kummer
und
der grosse Fermatsche Satz.

Akademische Festrede

zu

Kaisers Geburtstag

gehalten von

Kurt Hensel.

Marburg
N. G. Elwert'sche Verlagsbuchhandlung
1910.

Hochansehnliche Versammlung.

Der hohe Festtag, welcher heute im ganzen deutschen Reiche und überall, wo Deutsche in Treue der Heimat gedenken, mit innigem Danke gegen Gott gefeiert wird, lenkt unseren Blick zurück in das für die Entwickelung unseres Vaterlandes wichtigste jetzt verflossene Jahrhundert, in welchem aus unserem fast vollständig vernichteten Volke das grosse geeinte deutsche Reich geworden ist.

Eine unglaubliche nie gehoffte Entwickelung, welche uns mit immer neuem Danke gegen die grossen Männer erfüllen muss, die sie herbeigeführt haben, und gegen unseren Herrscher, der die Segnungen unserer Kämpfe, unserer Arbeit in dreiundzwanzigjährigem angestrengten und erfolgreichen Wirken erhalten und gemehrt hat. Wenn auch der Weg, den wir in diesem Jahrhundert zu gehen hatten, vielfach steil und gefährlich war, wenn uns auch mancher Umweg, manches Straucheln nicht erspart geblieben ist, so dürfen wir bei dem heutigen Rückblick mit Stolz sagen, er hat uns bergauf geführt, und das deutsche Volk fühlt die Kraft in sich, ohne Kleinmut und ohne Schwanken unserem Herrscher weiter zu folgen in guten und schweren Tagen.

Wir alle fühlen am heutigen Tage das Bedürfnis, den Blick in ähnlicher Weise in die Vergangenheit und in die Zukunft unseres ganzen Volkes schweifen zu lassen, aber jeder einzelne von uns denkt dann auch des Weges, auf den ihn selbst seine Ideale wiesen, der Ziele, die

er sich gesteckt hat, der Hoffnungen, die sich ihm erfüllten und die sich ihm vielleicht noch erfüllen können. Es ist ein guter Brauch, der an unserer Universität dem Festredner nahelegt, an diesem Tage über die höchsten Fragen seines Berufes rückblickend und vorschauend zu sprechen.

So möchte auch ich, dem heute die ehrenvolle Pflicht geworden ist, zu Ihnen zu reden, einen Rückblick tun in die Vergangenheit meiner Wissenschaft, um Ihnen Rechenschaft abzulegen ob und in welcher Richtung diese im vergangenen Jahrhundert fortgeschritten ist.

Es würde weit über den Rahmen dieser Rede hinausgehen, wollte ich versuchen, diesen Fortschritt für das ganze gewaltige Gebäude der Mathematik zu schildern; ich möchte nur den Versuch machen, anzugeben, in welcher Richtung sich die Königin der Mathematik, die Zahlenlehre, hauptsächlich in diesem Zeitraume entwickelte, eine Disziplin, welche erst in dem verflossenen Jahrhundert durch den Fürsten der Mathematiker, wie er mit Recht genannt wurde, unsern unsterblichen Carl Friedrich Gauss zum Range einer Wissenschaft erhoben und seitdem wesentlich durch die Arbeiten deutscher grosser Mathematiker zu der wunderbaren Ausbildung gebracht worden ist, welche uns heute mit dankbarem Stolze erfüllt. Eine solche Betrachtung ist gerade jetzt besonders berechtigt, weil wir in zwei Tagen den hundertjährigen Geburtstag des grossen Mathematikers Ernst Eduard Kummer feiern, dessen Lebenswerk zum grössten Teile der Entwicklung dieser Wissenschaft geweiht war; hat er doch in zwanzigjähriger unermüdlicher Geistesarbeit einen Gedanken zu voller Klarheit entwickelt, der seitdem in dieser Wissenschaft beherrschend und zur Grundlage fast aller weiteren Ergebnisse geworden ist, welche uns hier in überreichem Masse zu Teil wurden.

Die Entwicklung dieses grossen Kummerschen Gedankens, von dem allein ich heute sprechen will, hat eine höchst merkwürdige Vorgeschichte; er ist hervorgegangen aus dem Kampfe mit einem Jahrhunderte alten Probleme der Zahlenlehre, welches, an sich garnicht so bedeutsam, dadurch merkwürdig geworden ist, dass es immer und immer wieder den Anstoss gegeben hat zur Erweiterung und Vertiefung unserer Erkenntnis. Auch heute noch dauert diese Wirksamkeit in womöglich erhöhtem Masse fort, und durch eine seltsame Verkettung von Umständen ist gerade diese Frage auch unter den Laien bekannter geworden, als alle anderen Probleme, welche unsere Wissenschaft augenblicklich beherrschen; ich meine das sogenannte Fermat'sche Problem.

Sieht man von dem praktischen Nutzen ab, den die Beantwortung wissenschaftlicher Fragen haben kann, so lassen sich die Hauptprobleme unserer exaktesten Wissenschaft in zwei Klassen scheiden. Einmal sind es solche Fragen, welche der denkende Mensch, will er auf dem von ihm betretenen Wege fortschreiten, notwendig beantworten muss. Eine solche Frage, wenn sie einmal gelöst ist, bildet für alle Zeit einen Grundpfeiler für das stolze Gebäude unserer Wissenschaft, auf dem sich alles Weitere aufbaut; niemals kann der Name dessen, der in dieser Weise an dem grossen Baue mitgearbeitet hat, vergessen werden, mag sein Leib auch seit Jahrhunderten in Staub zerfallen sein. Solche Grundprobleme sind, um nur zwei Beispiele zu nennen, die Begründung der analytischen Geometrie durch René Descartes, durch die er die gesammte Raumlehre der Rechnung untertänig machte, ferner die Erfindung der Differential- und Integralrechnung, durch Leibnitz und Newton, durch welche die Mathematik erst zur vollen Herrschaft über die Natur gelangte da durch sie erst

eine wissenschaftliche Beschreibung der Naturvorgänge möglich wurde.

Dann aber giebt es einfache Fragen, welche nicht auf dem augenblicklichen Wege der Wissenschaft liegen, die aber eben deshalb, trotz ihrer Einfachheit, der Versuche spotten, mit dem Rüstzeuge der vorhandenen Hülfsmittel der hier auftretenden Schwierigkeiten Herr zu werden. Sie enthalten eine von Generation zu Generation wiederholte Mahnung, dass der bisher betretene Weg vielleicht doch nicht der richtige, jedenfalls nicht der einzige ist, der zur vollen Erkenntnis der Wahrheit führt. Nur aus diesem Grunde, nicht aber nach ihrem absoluten Erkenntniswerte, kann ein solches Problem durch viele Jahrhunderte gewissermassen als Prüfstein für die Leistungsfähigkeit der Wissenschaft im Vordergrunde des Interesses stehen, nur aus diesem Grunde wird hier jeder Schritt vorwärts zu ihrer Lösung mit Freude und Bewunderung begrüsst werden, weil er notwendig eine innere Ausgestaltung des grossen Gebäudes der Wissenschaft nach sich ziehen muss.

Zu dieser letzten Klasse gehört ausser den Problemen der Quadratur des Kreises, der Verdoppelung des Würfels mit Zirkel und Lineal, der Teilung eines Winkels in gleiche Teile, welche alle im vorigen Jahrhundert durch die mächtig geförderte Wissenschaft ihre volle Erledigung gefunden haben, auch ganz besonders das Fermatsche Problem, dessen Inhalt ich Ihnen kurz skizzieren will.

Aus der Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

die wir unseren weiteren Betrachtungen zu Grunde legen, kann man andere gesetzmässige Reihen ableiten, mit denen sich besonders die Forscher des siebzehnten Jahrhunderts liebevoll beschäftigten. Insbesonders waren es die Reihen der Quadratzahlen, der Kubikzahlen, der

vierten Potenzen u. s. w., welche man aus der natürlichen Zahlenreihe dadurch erhält, dass man jede ihrer Zahlen zweimal oder dreimal oder viermal u. s. w. mit sich selbst multipliziert. So erhält man die Reihe der Quadratzahlen

$$1,\ 4 = 2 \cdot 2,\ 9 = 3 \cdot 3,\ 16 = 4 \cdot 4,\ 25 = 5 \cdot 5,\ \ldots,$$

so die Kubikzahlen

$$1,\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2,\ 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3,\ 64 = 4 \cdot 4 \cdot 4,\ \ldots,$$

die vierten Potenzen

$$1,\ 16,\ 81,\ 256,\ \ldots,$$

die fünften Potenzen

$$1,\ 32,\ 243,\ 1024,\ \ldots,$$

und man erkennt ohne Weiteres, dass man so unendlich viele Reihen erhält, deren Glieder immer rapider anwachsen.

Schon im Altertum haben sich die Pythagoräer und später die Inder mit der ersten dieser Reihen, der Reihe 1, 4, 9, 16, 25, ... der Quadratzahlen eingehend beschäftigt und gezeigt, dass in sehr vielen Fällen die Summe zweier Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. So ist z. B. $9 + 16 = 25$, d. h. $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 5 \cdot 5$, $25 + 144 = 169$, d. h. $5 \cdot 5 + 12 \cdot 12 = 13 \cdot 13$, und dieselbe Erscheinung tritt sogar in dieser Reihe unendlich oft auf. Das war aber fast Alles, was das Altertum und das Mittelalter über diese Zahlen zu ergründen vermocht hat.

Im siebzehnten Jahrhundert, das wohl für alle Zweige der Mathematik eines der fruchtbarsten gewesen ist, entstand uns in Pierre Fermat ganz unvermittelt ein Mann, der, obwohl er nicht Mathematiker von Beruf sondern Jurist war, auf dem Gebiete der Arithmetik wahre Wunder vollbracht hat und vielleicht nächst Gauss als der grösste Zahlentheoretiker aller Zeiten anzusehen

ist. Fermat legte sich die Frage vor, ob man wohl auch in irgend einer der höheren Reihen der Kubikzahlen oder der vierten Potenzen u. s. w., eine Zahl als Summe von zwei anderen derselben Reihe darstellen kann, und kam zu dem Resultate, dass das niemals möglich ist. Niemals kann eine dritte Potenz als Summe von zwei anderen dritten Potenzen, eine vierte Potenz als Summe von zwei anderen vierten Potenzen u. s. w. dargestellt werden. Diese Behauptung hat Fermat in einer Randbemerkung zu den sechs arithmetischen Büchern des alexandrinischen Mathematikers Diophant ausgesprochen und er fügt die Worte hinzu: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet. (Ich habe für diese Behauptung einen wirklich wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand des Buches ist zu schmal, ihn darauf zu schreiben).

Bedenkt man, wie unendlich viele geistige Arbeit auf die Versuche, diesen Fermatschen Satz allgemein zu beweisen, in zweieinhalb Jahrhunderten von Berufenen und Unberufenen verwendet worden ist, so muss man es zunächst aufs tiefste bedauern, dass Pierre Fermat bei dieser Gelegenheit nicht etwas mehr Schreibpapier zu seiner Verfügung gehabt hat. Berücksichtigt man allerdings, dass ausser der Quadratur des Kreises wohl kein Problem zu so vielen falschen und irrtümlichen Deduktionen auch der allerersten Gelehrten Veranlassung gegeben hat, als dieses, so ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, dass auch jener „wunderbare" Beweis Fermats nicht richtig gewesen sein möchte. Dass Fermat für seinen Beweis nicht die Hilfsmittel zugänglich gewesen sein können, welche Kummer für den seinigen benutzt hat, leidet keinen Zweifel; aber bei der hohen Bedeutung Fermats erscheint es nicht

völlig ausgeschlossen, dass er auf einem gleich zu erwähnenden ganz anderen Wege verhältnismässig mühelos sein Ziel erreicht haben möchte, einem Wege, zu dem uns der Eingang bis jetzt noch völlig verschlossen ist.

Um den Sinn dieser Andeutung deutlicher hervortreten zu lassen, möchte ich kurz die Grundlagen charakterisieren, auf welchen Gauss vor etwa hundert Jahren das Gebäude der wissenschaftlichen Zahlenlehre oder der Arithmetik aufgebaut hat. Die Arithmetik beschäftigt sich mit den Eigenschaften der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., soweit sie auf ihrer Zusammensetzung oder Zerlegung durch A d d i t i o n und M u l t i p l i k a t i o n beruhen. Die Subtraktion, die im Wesentlichen mit der Addition zusammenfällt, und die Division, die nur eine besondere Multiplikation ist, brauchen da nicht gesondert betrachtet zu werden. Gauss musste nun bei seiner systematischen Untersuchung dieser Eigenschaften aller Zahlen im Wesentlichen diejenigen ganz ausschliessen, welche auf ihrer Zerlegung durch die Addition beruhen, weil unsere Hülfsmittel bis jetzt zu einer einheitlichen wissenschaftlichen Behandlung derselben noch nicht ausreichen. Unsere Zahlenlehre ist also im Wesentlichen nichts als eine systematische Darstellung der multiplikativen Eigenschaften aller ganzen Zahlen. Und zwar baut sich das ganze gewaltige System dieser Wissenschaft, wie es uns der erst siebzehnjährige Gauss mit einem Male fertig geschenkt hat, auf dem einen Ihnen allen bekannten Grundgesetze auf, d a s s s i c h j e d e Z a h l a l s d a s P r o d u k t v o n u n z e r l e g b a r e n o d e r P r i m z a h l e n d a r s t e l l e n l ä s s t, u n d d a s s d i e s e Z e r l e g u n g e i n e r Z a h l i n u n z e r l e g b a r e E l e m e n t e n u r a u f e i n e e i n z i g e W e i s e m ö g l i c h i s t. So ist z. B. die zusammengesetzte Zahl 30 gleich dem Produkte der drei Primzahlen 2, 3, 5, und es ist unmöglich, 30 auf andere

Weise in unzerlegbare Elemente zu zerfällen. Ähnlich also, wie uns die Chemie lehrt, dass die unübersehbare Menge aller Körper aus nur wenigen Elementen zusammengesetzt, bzw. durch die uns zu Gebote stehenden Hülfsmittel in solche Elemente zerlegt werden kann, zeigt uns die Arithmetik, dass alle unendlich vielen Zahlen aus den Elementen 2, 3, 5, 7, 11, ..., den Primzahlen, allein durch die Multiplikation aufgebaut werden können. Alles weitere folgt unwiderleglich mit zwingender Notwendigkeit aus diesem Grundgesetze, und alle Probleme, welche mit den multiplikativen Eigenschaften der Zahlen zusammenhängen, lassen sich mit Hülfe der Gauss'schen Arithmetik verhältnismässig einfach behandeln; dagegen bieten uns auch die einfachsten additiven Aufgaben in sehr vielen Fällen fast unüberwindliche Schwierigkeiten, da wir immer noch des neuen Gauss harren, der uns eine Wissenschaft von der Zerlegung der Zahlen durch Addition schenken könnte.

Wie Sie sehen, ist nun der Fermat'sche Satz ein sehr einfaches additives Problem, denn er sagt aus, dass niemals eine Kubikzahl als Summe von zwei Kubikzahlen oder eine vierte Potenz als Summe von zwei vierten Potenzen dargestellt werden kann u. s. w. und gerade darum stellt diese ungelöste Frage in den seit ihrer Aufstellung verflossenen Jahrhunderten immer wieder die Forderung an uns, unsere Zahlenwissenschaft so zu erweitern und auszubilden, dass sie auch diese und alle anderen additiven Probleme möglichst leicht behandeln könnte.

Es ist nun nicht ganz unmöglich, dass Fermat, der grosse Vorgänger von Gauss, vielleicht den Schlüssel zu einer solchen neuen Wissenschaft von der additiven Arithmetik gehabt habe, dass dieser aber bei seinem Tode verloren gegangen sei, und dass sich in

der langen Zwischenzeit kein wirklicher Geistesverwandter des grossen Todten gefunden habe, der auf seinen Wegen wandelnd den wahren Eingang zu diesem vielumstrittenen Gebiet gesehen hat.

Aber gerade das Fermatsche Problem hat uns im letzten Jahrhundert mächtig angeregt, auch die von Gauss begründete *multiplikative* Zahlenlehre so weit auszubauen und so zu verfeinern, dass die früher in einsamer Grösse dastehende Arithmetik heute fast der ganzen Mathematik ihre Gesetze vorschreibt und dass sie im Stande ist, auch die meisten bisher unlösbaren Probleme, unter ihnen auch das Fermatsche, in sehr vielen Einzelfällen in wunderbar einfacher Weise zu lösen. Diesen Fortschritt, den wir eben Ernst Eduard Kummer verdanken, möchte ich Ihnen in kurzen Worten schildern.

Ein additives Problem der Zahlenlehre wird sich verhältnismässig leicht lösen lassen, wenn man ein Mittel besitzt, dasselbe in ein multiplikatives umzuwandeln, denn dann wird es ja der Gauss'schen Arithmetik zugänglich. Nur deshalb weil diese Umwandlung bei dem einfachsten Fermatschen Probleme für die *Quadratzahlen* so leicht gelang, war es schon den Griechen und Indern möglich, dieses vollständig zu lösen. Es lag nun nahe, diese Umwandlung auch des allgemeinen additiven Fermatschen Problemes für die Kubikzahlen, die vierten Potenzen u. s. w. in ein solches der Multiplikation zu versuchen. Hier ergab sich aber, *dass die Umwandlung solange unmöglich war,* **als man sich auf das bisher stets betrachtete Gebiet der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... beschränkte, für welches allein Gauss seine** *multiplikative Zahlenlehre begründet hatte.*

Der Grund davon lag in dem Umstande, dass das bisher betrachtete Gebiet der Zahlen 1, 2, 3, . . . einfach zu klein war, um in ihm die zu jener Umwandlung nötigen Schritte wirklich auszuführen; dagegen wurde diese Umformung sofort möglich, wenn man den Mut hatte, zu dem beschränkten Bereiche unserer Zahlen, ein dieses umfassendes grösseres Zahlenreich hinzuzunehmen, diesen Zahlen, wie es Gauss sehr anschaulich ausdrückt, das gleiche Bürgerrecht mit den gewöhnlichen ganzen Zahlen zu geben. Für jede einzelne der Fermatschen Reihen, der dritten oder der vierten oder der fünften Potenzen u. s. w., musste man ein anderes sog. algebraisches Zahlenreich zur Hülfe nehmen, um den Fermatschen Satz als ein Problem der Multiplikation darzustellen; nur so konnte man hoffen, unter Anwendung der Gauss'schen Hülfsmittel das Fermatsche Problem in jedem einzelnen Falle, also ganz allgemein, zu lösen.

Dieser Gedanke war es, den der Liegnitzer Gymnasiallehrer Ernst Eduard Kummer mit der ganzen Energie und dem Feuer der frischen vorwärtsstrebenden Jugend erfasste und in mehrjähriger angestrengter Arbeit zur Reife brachte. Er war zur Lösung dieser grossen Aufgabe insofern wohl vorbereitet, als er mit einer ganz wunderbaren Phantasie, dem notwendigsten Hülfsmittel für erfolgreiches Vordringen in unserer Wissenschaft eine gewaltige Arbeits- und Denkkraft verband. So war es ihm möglich geworden, in einer zehnjährigen angestrengten Lehrtätigkeit am Gymnasium eine grosse Reihe so hervorragender Werke zu schaffen, dass er schon mit 29 Jahren zum Korrespondenten der Berliner Akademie ernannt und bald darauf als ordentlicher Professor an die Breslauer Universität berufen wurde. Dagegen hatten bisher alle seine Arbeiten auf

einem anderen Gebiete seiner Wissenschaft gelegen, und in seiner Abgeschiedenheit in Liegnitz musste er sich sein Rüstzeug, welches er in dem Kampfe mit dem Fermatschen Probleme brauchen wollte, fast ganz selber schmieden.

Kummer machte sich nun klar, dass die Resultate der Gauss'schen multiplikativen Zahlenlehre nur dann für das von ihm hinzugenommene grössere Reich der algebraischen Zahlen gelten können, wenn in ihm auch alle Gesetze der von Gauss nur für das gewöhnliche Zahlenreich 1, 2, 3, . . . bewiesenen Arithmetik gültig sind, wenn also in ihm das Grundgesetz von der Zerlegbarkeit aller Zahlen in unzerlegbare Elemente besteht. Nach mehrjährigen Versuchen gelingt es ihm, den Beweis zu führen, dass wirklich auch in diesem erweiterten Bereiche jede Zahl in nicht weiter zerlegbare Elemente zerfällt, so dass er sich zu der Annahme berechtigt glaubt, dass nun auch alle Zahlgesetze der Gauss'schen Arithmetik genau ebenso erfüllt sind, wie im Bereiche der natürlichen Zahlen.

In seinem feurigen vorwärts strebenden Geiste hielt Kummer nun die Zeit für gekommen, mit einem Schlage das vielumworbene heissumstrittene Fermatsche Problem vollständig zu lösen. Der Versuch gelang durch geistvolle Betrachtungen auf verhältnissmässig wunderbar einfache Weise, und bald konnte er seinem verehrten Lehrer und Freunde Gustav Lejeune-Dirichlet eine druckfertige Abhandlung über die fast zwei Jahrhunderte lang vergeblich gesuchte Lösung vorlegen. Wer beschreibt aber seine Empfindungen, als ihm Dirichlet die Eröffnung machen muss, die mehrere Jahre gesuchte Lösung sei völlig falsch, er habe durch alle seine Bemühungen diese Frage um keinen einzigen Schritt gefördert.

In diesem Augenblicke hat sich Kummer sicher nicht träumen lassen, dass er auf diesem Schlachtfelde in späteren Jahren gerade den grössten Erfolg seines Lebens erringen werde. Es ist aber ein Zeichen für seine unbesiegbare Energie und für seine jugendliche Schaffenskraft, dass er auch jetzt seine Arbeit nicht verloren gab und sofort trachtete, den Grund seiner Niederlage zu erkennen, und diese womöglich in einen Sieg zu verwandeln. Der von ihm begangene Fehler beruhte darauf, dass er zwar bewiesen hatte, dass in dem neuen Zahlbereich jede Zahl in unzerlegbare Faktoren zerfällt, dass also die erste Hälfte des Gauss'schen Grundgesetzes auch in diesem grösseren Bereich besteht, dass er aber unterlassen hatte zu prüfen, ob diese Zerlegung nicht vielleicht auf mehrere verschiedene Arten gemacht werden kann. Leider leider war dies nun wirklich der Fall und damit allein war dargetan, dass für die multiplikative Zahlenlehre in diesem neuen Zahlenreiche absolut nicht die einfachen Gesetze gelten, welche Gauss für den Bereich der gewöhnlichen Zahlen 1, 2, 3, ... als gültig nachgewiesen hatte, und mit deren Hülfe allein der Beweis des Fermatschen Satzes auch in dem allgemeinen Falle möglich gewesen wäre.

Kummer fragte sich nun, woher wohl diese ganz monströse Eigenschaft der Zahlen jenes grösseren Bereiches kommen könnte, und es ist ein glänzendes Zeugnis für die schöpferische Phantasie dieses grossen Mannes, dass er die richtige Antwort hierauf, wenn auch erst nach mehrjährigem heissen Bemühen fand. Allerdings war die Lösung *dieses* Rätsels auch das Zauberwort, durch welches auf einmal der Eingang in ein ganz neues Reich aufgetan wurde, das vorher durch steile Felsen und Klippen versperrt gewesen war.

In meinen Händen befindet sich die durch genau 50 Jahre fortgeführte wissenschaftliche Korrespondenz Kummers mit seinem Schüler und seinem späteren besten und geliebtesten Freunde, dem grossen Mathematiker Leopold Kronecker. Mit tiefer Bewegung und höchster Bewunderung habe ich hier fast von Monat zu Monat den jahrelangen Kampf mit dem Probleme des grossen algebraischen Zahlenreiches verfolgt, mit Bewegung über die freudig ertragenen fast übermenschlichen Anstrengungen intensivsten Denkens, mit Bewunderung für das sichere Vertrauen in die in der Natur waltende höchste Gesetzmässigkeit, welche ihn manchem Misslingen zum Trotz den einmal betretenen Weg als den zum Ziele führenden festhalten liess. Und herrlich wurde dieses Vertrauen durch das wunderbar schöne und einfache Ergebnis belohnt; so einfach ist es, dass ich hoffe, es Ihnen mit wenigen Worten völlig verständlich machen zu können.

Kummer hatte ja gleich im Anfang eingesehen, dass er, um das additive Problem des Fermatschen Satzes in ein multiplikatives umzuwandeln, den kleinsten Bereich der gewöhnlichen Zahlen 1, 2, 3, . . ., in dem alle Sätze der Addition und Multiplikation galten, erweitern musste durch einen zweiten grösseren Bereich, den der algebraischen Zahlen, in dem zwar alle die wenigen Gesetze der Addition aber nicht die der Multiplikation galten, und dies letztere aus dem Grunde, weil hier jede Zahl dieses Bereiches auf mehrere verschiedene Arten in unzerlegbare Faktoren zerlegt werden kann. Jetzt ergab sein fortgesetztes Eindringen in die Natur dieser algebraischen Zahlen, dass auch sie auf eine einzige Art in unzerlegbare Primfaktoren zerfallen, dass aber auch dieser grössere Bereich wieder zu klein ist, um alle diese neuen Primzahlen zu enthalten Aus diesem Grunde nennt Kummer jene einfachsten.

ausserhalb des Bereiches der algebraischen Zahlen liegenden Bestandteile derselben ideale Zahlen oder ideale Primfaktoren. Hätten wir z. B. vier solche ideale Primzahlen *a, b, c, d,* so könnten ihre Produkte zu je zweien *ab, ac, bc,* . . . im Reiche der algebraischen Zahlen vorhanden sein; aber schon diese Produkte würden dort unzerlegbar sein, weil ihre Bestandteile *a, b, c, d* dort nicht vorkommen, und das Produkt *a b c d* aller dieser vier idealen Zahlen würde so auf drei verschiedene Arten im Gebiete der algebraischen Zahlen in unzerlegbare Faktoren zerfallen, denn es wäre gleich *(ab) (cd)* oder *(ac) (bd)* oder *(ad) (bc).*

Erweitert man aber das Gebiet der algebraischen Zahlen noch mehr durch dasjenige der idealen Zahlen, so gilt in diesem grössten Bereiche wieder die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren, und daraus folgt, dass im Reiche der algebraischen Zahlen nun alle Gesetze der Multiplikation und der Addition genau so gelten, wie im Gebiete der Zahlen 1, 2, 3, . . . der gewöhnlichen Zahlen, denn sie lassen sich ja eindeutig in allerdings ideale Primfaktoren zerlegen.

Nun konnte Kummer nach sechsjähriger weiterer Geistesarbeit als Meister in diesem Reiche der Zahlen seinen damals versuchten Beweis des Fermatschen Satzes aufnehmen, und beweisen, dass z. B. die Summe von zwei Kubikzahlen niemals eine Kubikzahl sein kann, selbst wenn man jene Zahlen in dem grösseren Gebiete der algebraischen Zahlen annimmt. Dasselbe gelang ihm nun auch für die vierten, die fünften Potenzen und fast für alle Fermatschen Reihen. Aber gewisse Reihen entzogen sich auch jetzt seinen Bemühungen, denn für sie war es nicht zu vermeiden, dass die Rechnung aus dem Gebiete der algebraischen Zahlen in das äusserste Gebiet der idealen Zahlen hinausführte, und für diese

gelten wiederum zwar die Gesetze der Multiplikation, aber nicht die der Addition; diese Fermatschen Reihen haben auch bis auf den heutigen Tag den Versuchen Kummers und seiner Nachfolger widerstanden.

In diesem Sinne allein besteht also auch heute noch ein Fermatsches Problem, und leider, möchte ich beinahe sagen, ist dieses durch einen äusseren Umstand auch unter den Laien zu einer grossen Berühmtheit gelangt. Ein unlängst verstorbener Mathematiker, der selbst sein Leben der Erforschung dieser Fragen geweiht hatte, hat einen Preis von 100000 Mark auf die vollständige Lösung des Fermatschen Problemes ausgesetzt. Da es nun leider ebenso leicht ist, die hier gestellte Frage zu verstehen, wie es schwer ist, sie zu beantworten, so haben eine ganz entsetzlich grosse Anzahl von Laien über dies Problem nachgedacht, und in den letzten Jahren sind gegen 1000 Lösungen dieser Frage der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, der die Zuerkennung des Preises obliegt, überreicht worden; es gab sogar manche Bewerber, welche der Gesellschaft mit den Gerichten drohten, wenn ihnen „ihre“ 100000 Mark nicht sofort ausgehändigt würden. Auch ich als Leiter des Crelleschen Journales erhalte etwa alle 8 bis 14 Tage eine neue Lösung dieses Problemes; die meisten sind etwa vier Seiten lang, aber eine fand sogar auf einer weitgeschriebenen Postkarte Raum. Häufig wurde ich von emeritierten Pfarrern, Förstern, höheren und niederen Beamten und Offizieren gefragt, ob es nicht eine hoffnungsvolle Beschäftigung für ihre Tage der Ruhe wäre, sich diesem Probleme zuzuwenden. Ich habe diese Frage nicht zustimmend beantworten können.

Diese Flutwelle wird vorübergehen, und es kann gehofft werden, dass entweder ein kongenialer Geist von Kummer seine multiplikativen Methoden so weit aus-

bildet, dass das Fermatsche Problem auf dem hier dargelegten Wege vollständig gelöst werden kann, oder dass sich vielleicht gar ein neuer Fermat findet, der durch ganz neue Methoden der additiven Zahlenlehre ohne das Gebiet der ganzen Zahlen zu verlassen unsere Frage ohne jeden Umweg über die Multiplikation löst. Das letztere scheint mir leider vorläufig noch nicht wahrscheinlich, wenn auch in neuester Zeit bemerkenswerte Versuche gerade in dieser Richtung gemacht worden sind. Das Erste darf aber nach der wunderbaren Entwickelung unserer Zahlenlehre durch und seit Kummer mit fester Hoffnung erwartet werden.

Nun möchte ich zum Schlusse noch einmal hervorheben, was eigentlich der Preis gewesen ist, den Kummer mit dem Beweise des Fermatschen Satzes in Wahrheit errungen hat. Kummer stand jener Satz selbst im Vordergrunde des Interesses, er hat es ausgesprochen, dass er wohl kaum in zwanzigjähriger Arbeit die Lehre von den idealen Zahlen ausgestaltet haben würde, wenn es ein anderes Mittel, diesen Satz zu beweisen, gegeben hätte.

Wir dagegen, die wir heute überblicken, ein wie reiches fruchtbares Land uns durch die Kummer'sche Gedankenarbeit erschlossen worden ist, wie wunderbar durch die dort herrschenden Gesetze unsere ganze Wissenschaft vereinfacht und gekräftigt worden ist, wir müssen anderer Ansicht sein.

So wollte auch Christoph Kolumbus auf dem Seewege über die fabelhaften Länder Antilia und Zipangu den Weg nach Indien suchen, als er am 3. August 1492 mit seinen drei Karavelen von Palos absegelte. Als aber am 12. Oktober der Kanonenschuss erdröhnte, der das ersehnte Zeichen gab, dass endlich, endlich Land in Sicht sei, da lag vor Kolumbus im Glanze der aufgehenden Sonne eine neue Welt, die er sich nie erträumt hatte, die

aufzusuchen er nicht ausgefahren war, und das Schicksal hat es gewollt, dass er gestorben ist, ohne zu wissen, was er wirklich für die Menschheit entdeckt hat.

Ebenso hat uns auch Kummer eine neue Welt erschlossen; er hat uns in dem Streben, ein verhältnismässig weniger bedeutendes Problem des gewöhnlichen Zahlenreiches zu lösen, erst in das damals noch wenig gekannte grosse Reich der algebraischen Zahlen wirklich eingeführt; derselbe Wunsch zog ihn jedoch weit über die Grenzen auch dieses Gebietes in das vor ihm noch nie betretene Reich der idealen Zahlen. Aber auf Grund genauester Durchforschung dieses neuen Reiches führte er uns viel weiter als dies Kolumbus beschieden war: Ebenso nämlich, wie Newton nachwies, dass dasselbe Gesetz, welches auf unserer Erde, diesem kleinsten Teile unseres kleinen Sonnensystemes, den Apfel zu Boden zwingt, nicht bloss auf dieser Erde, nicht nur in unserem Planetensysteme herrscht, sondern auch in den unendlichen Himmelsfernen waltet, ebenso zeigten Kummer und seine Schüler und Nachfolger, dass die Gesetze, welche für unsere gewöhnlichen Zahlen 1, 2, 3, ... gelten, auch die schier unabsehbaren Mengen aller Zahlen beherrschen, mit denen man überhaupt rechnet.

Aber noch mehr, es hat sich gezeigt, dass die von Kummer uns erschlossenen Gesetze nicht allein die Zahlenlehre in ihrer weitesten Ausdehnung beherrschen, sondern dass sie überall da gelten, wohin die Rechnung überhaupt dringt. Die unendliche Mannigfaltigkeit aller Fragen der Geometrie, die ja durch Descartes der Rechnung untertan wurde, wird erst im höchsten Sinne einfach durch diese Gesetze, ja die tiefsten Fragen der Differential- und Integralrechnung dieses Meisterwerkes von Leibniz und Newton sind durch diese Kummer'schen Gesetze ihrer Lösung nahe gerückt worden.

Unter diesem Gesichtspunkte können wir doch wohl dem gütigen Geschicke danken, welches dem Parlamentsrate in Toulouse Pierre Fermat im Jahre 1670 am Rande des Diophant nicht genug Raum zum Schreiben liess, da durch dieses ungelöste Problem der Geist eines Kummer so gewaltig angeregt werden konnte, dass er uns die Idealtheorie schenkte.

Es liegt mir nunmehr ob, über den Erfolg der im letzten Jahr gestellten Preisaufgaben zu berichten und die neuen Preisaufgaben bekannt zu geben:

Meine Herren Kommilitonen!

Mit besonderer Freude erkennen wir Ihre Bemühungen um die hier zu erzielenden Erfolge an und wir hoffen, dass auch die heute bekannt gegebenen Aufgaben viele Kräfte für den geistigen Wettkampf entfesseln und zu dem ersten wissenschaftlichen Erfolge führen mögen.

Freudig kehren unsere Gedanken am heutigen Tage zu dem Anlasse dieses Festes zurück. Wir bekennen uns aufs Neue treu zur monarchischen Staatsform überhaupt, und wir erheben in dankbarer Verehrung unseren Blick zu dem Träger unseres höchsten und verantwortungsvollsten Amtes. Es ist ein schönes und grosses Erbe, welches unser erlauchter Kaiser und König besonders von seinem Urgrossvater, dem König Friedrich Wilhelm III. und von seinem Grossvater, dem Kaiser und König Wilhelm I. übernommen und in hingebender Arbeit erhalten und gemehrt hat. Zwei Erfolge seiner Herrschertätigkeit müssen wir, so will es mir scheinen, mit ganz besonderem Dank hervorheben.

Im Anfange des jetzt verflossenen Jahrhunderts wurde für unser darniederliegendes und geknechtetes Volk durch seinen König und Scharnhorst zum ersten Male der Grundsatz aufgestellt, dass die Armee das Volk in Waffen sein solle, ein nationales Heer, dem jeder Wehrfähige angehörte. Im Laufe dieses Jahrhunderts haben wir gelernt, dass Preussen, dass Deutschland als Schutz seiner überall offenen Grenzen, als lebenden Damm gegen die von allen Seiten heranbrandende Flut der kriegerischen Bestrebungen von ganz Europa die Söhne des eigenen Volkes haben muss, und mit tiefem Danke erkennen wir an, dass unser Herrscher in seiner dreiundzwanzigjährigen Regierung niemals die Hand dazu geboten hat, diesen Damm zu schwächen, wohl wissend, dass hier ein Nachgeben der Anfang vom Ende sein würde.

Wie aber zur Zeit der Perserkriege das delphische Orakel dem Athenischen Volke die hölzernen Mauern als beste Wehr empfahl, welche ihnen dann auch bei Salamis auf lange Zeit das Geschick der Welt bestimmen halfen, ebenso hat unser Herrscher uns immer aufs Neue auf die eisernen Mauern hingewiesen, welche uns nottun zum Schutze unserer Grenzen und unserer Kolonieen, und die Ausgestaltung unserer deutschen Flotte dürfen wir als sein eigenstes schwer und zielbewusst durchgesetztes Werk ansehen.

Wesentlich in die Regierungszeit unseres Herrschers fällt die Umwandlung unseres Landes aus einem mehr agrarischen in einen mehr industriellen Staat, ein unaufhaltbarer Prozess, welcher bei uns zwar wesentlich später, als bei den Engländern, Belgiern und Franzosen, nun aber mit gewaltiger Energie eingesetzt hat. Es ist mit Freude zu begrüssen, dass sich auch diese Kräfte unserer Nation in so überreichem Masse erschlossen haben, aber in dieser schnellen einseitigen Entwickelung liegen

auch grosse Gefahren für die physische und moralische Degenerierung unseres Volkes. Wir danken es unserem Herrscher, dass er bald dahin gelangt ist, neben der Industrie auch unsere Landwirtschaft durch alle ihm zu Gebote stehenden Mittel zu stärken und zu heben.

Möchte ein gütiges Geschick diesen pflichterfüllten, willensstarken Herrscher noch lange Zeit zum Heile unseres Volkes wirken lassen; möchten die heiligen Bande, die ihn mit dem deutschen Volke verbinden, immer festere werden; möchte es ihm beschieden sein, zur Ausführung seiner volksbeglückenden Wünsche und Pläne starke, umsichtige, selbstlose Helfer und Berater zu finden.

Wir aber wollen unsere Wünsche und das Gelöbnis unwandelbarer Treue bekräftigen in dem Rufe:

Seine Majestät, der Deutsche Kaiser und König Wilhelm der Zweite, er lebe hoch!

Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln u. ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale

Von

Dr. Kurt Hensel,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Marburg a. L.,

Dr. Georg Landsberg,
Professor der Mathematik an der Universität Kiel.

Mit vielen Figuren im Text. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. M. 28.—

Inhalt: I. Teil: Ausbreitung der algebraischen Funktionen auf der Riemannschen Fläche. II. Teil: Der Körper algebraischer Funktionen. III. Teil: Die algebraischen Divisoren und der Riemann-Rochsche Satz. IV. Teil: Die algebraischen Kurven oder Gebilde. V. Teil: Die Klassen algebraischer Gebilde. VI. Teil: Algebraische Relationen zwischen Abelschen Integralen. Anhang. Sachregister.

Das Buch gibt eine umfassende Behandlung der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln auf wesentlich arithmetischer Basis mit Anwendung auf die Abelschen Integrale und algebraischen Kurven. Dabei haben sich die Verfasser bemüht, die ganze Theorie und alle aus ihr abzuleitenden Folgerungen ohne jede sogenannte vereinfachende Voraussetzung zu begründen und nur solche Methoden und Definitionen zu benutzen, welche auf jeden vorgelegten, noch so speziellen Fall anwendbar bleiben, und zwar so, dass die verlangten Rechnungen stets wirklich ausgeführt werden können.

Theorie der algebraischen Zahlen

Von Dr. **Kurt Hensel**

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Marburg

In 2 Bänden

I. Band. [XII u. 349 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. M. 14.—

Die in diesem Werke gegebene neue Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen beruht auf der Tatsache, dass es möglich ist, alle rationalen und algebraischen Zahlen in konvergente Potenzreihen zu entwickeln, welche genau wie die entsprechenden Reihen der Funktionentheorie nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen einer beliebigen Primzahl p fortschreiten. Diese eindeutig bestimmten Reihen sind nun so beschaffen, dass jede zwischen solchen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ bestehende rationale Gleichung $f(\alpha, \beta \ldots \gamma) = 0$ mit rationalen Koeffizienten dann und nur dann ihrer Grösse nach gilt, wenn sie auch „für den Bereich dieser Primzahl p erfüllt ist", d. h. wenn ihre linke Seite durch jede noch so hohe Potenz von p teilbar ist, sobald man für $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ genügend hohe Näherungswerte der ihnen gleichen Potenzreihen einsetzt.

Auf dieser Grundlage ergibt sich eine völlig einheitliche Theorie der algebraischen Zahlen, welche genau in derselben Weise einfach und ausnahmslos dieses Gebiet beherrschen lehrt, wie dies bei der Theorie der algebraischen Funktionen durch die Vermittlung der dieselben charakterisierenden Potenzreihen geschieht. Jede algebraische Zahl n^{ter} Ordnung besitzt für den Bereich einer jeden Primzahl p genau n und nur n solche konvergente Entwicklungen, welche sich entsprechend der Natur von p von selbst in Zyklen konjugierter Reihen genau ebenso anordnen, wie dies für die algebraischen Funktionen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes der Fall ist.

Bei dieser Darstellung erledigen sich alle, auch die kompliziertesten Fragen der Teilbarkeit genau ebenso einfach, wie bei den algebraischen Funktionen, ohne dass jemals Ausnahmefälle der Theorie Schwierigkeiten bereiten. Wörtlich dieselben Untersuchungen führen endlich zur Erkenntnis der zwischen den algebraischen Zahlen ihrer Grösse nach bestehenden Beziehungen und damit zu der Theorie der algebraischen Einheiten.







